

**Metoda konečných objemů pro  
řešení problémů z oblasti  
mechaniky tekutin**

**Finite volume method for solving  
fluid dynamics problems**

# Zadání bakalářské práce

Student:

**Martin Koběorský**

Studijní program:

B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103R031 Výpočetní matematika

Téma:

Metoda konečných objemů pro řešení problémů z oblasti mechaniky  
tekutin

Finite volume method for solving fluid dynamic problems

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je seznámení se s metodou konečných objemů a jejím využití pro řešení problematiky proudění tekutin. Metoda konečných objemů je jednou z metod pro diskretizaci a numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tato metoda je velmi populární pro řešení parciálních diferenciálních rovnic v oblasti mechaniky tekutin a jako taková je implementována v mnoha komerčních i open source programových balících. Součástí práce budou také numerické experimenty, demonstrující chování metody na jednoduchých příkladech.

Seznam doporučené odborné literatury:

H. Versteeg, W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, second edition, 2007

R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin, The finite volume method, update of the article published in Handbook of Numerical Analysis, 2000

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Marta Jarošová, Ph.D.**

Konzultant bakalářské práce: Ing. Tomáš Brzobohatý, Ph.D.

Ing. Tomáš Karásek, Ph.D.

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015



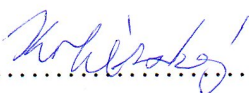
doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
děkan fakulty

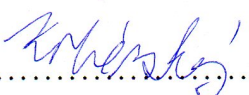
Souhlasím se zveřejněním této bakalářské práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 *Studijního a zkušebního řádu pro studium v bakalářských programech VŠB-TU Ostrava*.

V Ostravě 7.5.2015

.....

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 7.5.2015

.....

Děkuji za odborné vedení a trpělivost Ing. Martě Jarošové, PhD.

## **Abstrakt**

Cílem této práce je seznámit se s metodou konečných objemů a jejím využitím v oblasti mechaniky tekutin. V práci je postupně popsáno, jak se pomocí metody konečných objemů řeší difuzní rovnice, rovnice proudění a Navier-Stokesovy rovnice. Jako řešení Navier-Stokesových rovnic je představen algoritmus SIMPLE. Nakonec je algoritmus SIMPLE použit pro řešení ukázkových úloh z oblasti mechaniky tekutin.

**Klíčová slova:** Algoritmus SIMPLE, metoda konečných objemů, Navier-Stokesovy rovnice, difuzní rovnice, proudění

## **Abstract**

The objective of this work is to understand the finite volume method and its application for solving Computational Fluid Dynamics problems. Application of Finite Volume Method to solve diffusion equation, convection-diffusion equation and Navier-Stokes equation is presented in this work. Algorithm SIMPLE is introduced as a way to solve Navier-Stokes equation. This algorithm SIMPLE is used solve well-known Computational Fluid Dynamics problems such as lid-driven cavity and tunnel.

**Keywords:** Algorithm SIMPLE, Finite volume method, Navier-Stokes equations, diffusion equation, convection-diffusion equation

## Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Metoda konečných objemů - difuze</b>	<b>4</b>
2.1	Diskretizace . . . . .	4
2.2	Integrace přes kontrolní objemy . . . . .	5
2.3	Okrajové podmínky . . . . .	6
2.4	Sestavení matice a vektoru pravých stran . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Metoda konečných objemů - proudění</b>	<b>10</b>
3.1	Centrální diferencování . . . . .	10
3.2	Upwind . . . . .	11
3.3	Hybridní diferencování . . . . .	12
3.4	Okrajové podmínky . . . . .	13
3.5	Sestavení matice a vektoru pravé strany . . . . .	14
<b>4</b>	<b>SIMPLE</b>	<b>16</b>
4.1	Staggered Grid . . . . .	17
4.2	Diskretizované rovnice . . . . .	18
4.3	Tlakové pole . . . . .	21
4.4	Relaxace . . . . .	23
4.5	Okrajové podmínky pro rovnice tlakových korekcí . . . . .	24
4.6	Shrnutí algoritmu . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>26</b>
5.1	Cavity . . . . .	26
5.2	Tunel . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Reference</b>	<b>34</b>

## Seznam obrázků

1	Kontrolní objem . . . . .	4
2	Označení vedlejších uzlů . . . . .	5
3	Diskretizovaná doména . . . . .	5
4	Okraj domény . . . . .	7
5	Výsledky příklad 1 . . . . .	9
6	Výsledek příklad 2 . . . . .	15
7	Šachovnicové pole tlaků [1, str. 137] . . . . .	17
8	Označování uzlů na Staggered gridu . . . . .	18
9	Buňka $u$ . . . . .	19
10	Buňka $v$ . . . . .	20
11	Okrajová podmínka [1, str. 137] . . . . .	24
12	Zadání úlohy - cavity . . . . .	26
13	Numerické řešení $u$ . . . . .	27
14	Numerické řešení $v$ . . . . .	28
15	Numerické řešení $p$ . . . . .	28
16	Proudnice . . . . .	29
17	Proudnice Ghia [5] . . . . .	29
18	Porovnání výsledku $u$ rychlostí pro $y=0.5$ . . . . .	30
19	Porovnání výsledku $v$ rychlostí pro $x=0.5$ . . . . .	30
20	Zadání úlohy - tunel . . . . .	31
21	Numerické řešení $u$ . . . . .	31
22	Numerické řešení $v$ . . . . .	32
23	Numerické řešení $p$ . . . . .	32

# 1 Úvod

Mnoho jevů z reálného světa se dá popsat pomocí diferenciálních rovnic. Bohužel tyto rovnice většinou nemají analytické řešení, i přesto je možné najít jejich přibližné řešení na nějaké konkrétní doméně.

Jedním ze způsobů jak najít tato numerická řešení je metoda konečných objemů. Ta doménu diskretizuje do konečného počtu kontrolních objemů, v jejichž uzlových bodech se spočítá daná veličina. Jednotlivé hodnoty veličiny spočítáme ze zadané diferenciální rovnice, kterou integrujeme přes každý kontrolní objem. Následně převedeme trojné integrály na plošné pomocí Gauss-Ostogradského věty[2].

V kapitole 2 je představeno použití metody konečných objemů na rovnici difuze. Představujeme zde techniky k vyhodnocení derivací a je zde také popsáno zahrnutí okrajových podmínek do diskretizovaných rovnic. V kapitole 3 se zabýváme rovnicí proudění. Popisujeme zde metody pro vyhodnocení proudových členů rovnice. Rovnice v kapitole 2 a 3 jsou speciální formou obecné transportní rovnice [1]

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi u) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S. \quad (1.1)$$

V kapitole 4 je představen algoritmus SIMPLE pro řešení Navier-Stokesových rovnic. V kapitole 5 je algoritmus SIMPLE použit pro vyřešení ukázkových úloh z oblasti mechaniky tekutin a výsledky jsou porovnány se známým analytickým řešením nebo s referenčními výsledky.



## 2 Metoda konečných objemů - difuze

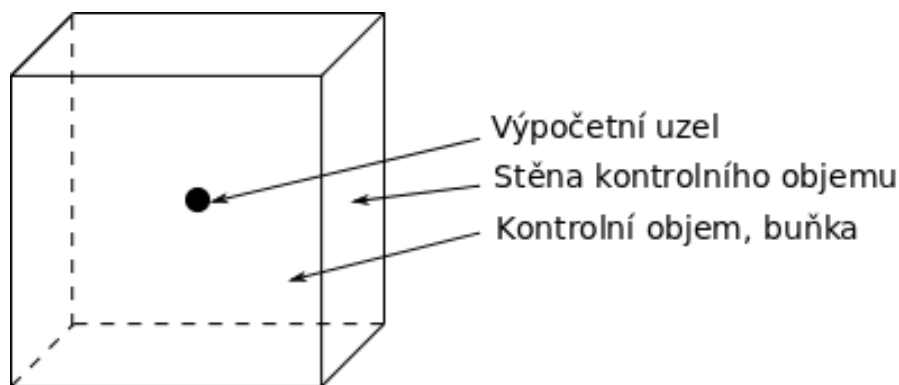
V této kapitole na difuzní rovnici popíšeme základní princip metody konečných objemů. Difuzní rovnice je speciální verzí obecné transportní rovnice(1.1), kde  $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = 0$  a  $\text{div}(\rho\phi u) = 0$ . Budeme se zabývat rovnicí v jedné dimenzi. Uvažujme tedy

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) + S = 0, \quad (2.1)$$

kde  $\Gamma$  je difuzní koeficient,  $S$  je vliv nějakého vnějšího činitele na hodnotu  $\phi$  (například tlakové nerovnosti) a  $\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$  představuje vliv difuze na hodnotu  $\phi$ . Při popisu metody vycházíme převážně z knihy Introduction to Computational Fluid Dynamics[1].

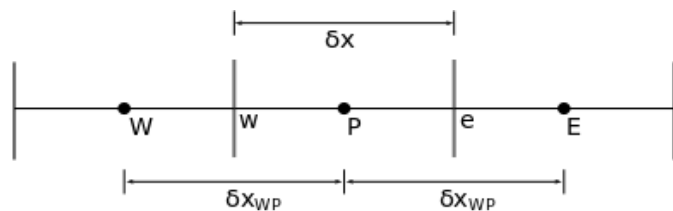
### 2.1 Diskretizace

Začneme rozdělením domény na konečný počet kontrolních objemů. Vložíme několik výpočetních uzlů do prostoru mezi hranice domény, viz obrázek 3. Hranice kontrolních objemů se vkládají vprostřed mezi sousední uzly. Pokud není zadáno jinak, řešíme-li úlohu v jedné dimenzi, můžeme předpokládat, že velikosti kontrolních objemů v ose  $y$ ,  $z$  jsou jedna. U úlohy ve dvou dimenzích můžeme předpokládat, že velikost v ose  $z$  je jedna.



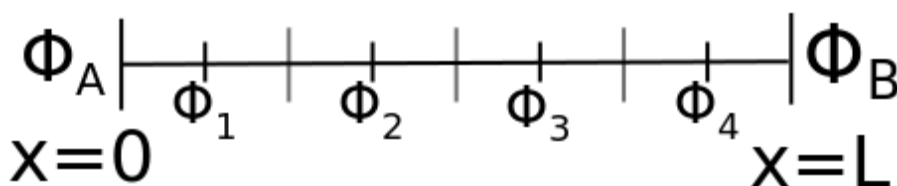
Obrázek 1: Kontrolní objem

Mluvíme-li o nějakém obecném uzlu, označujeme ho  $P$ , uzel nalevo od uzlu  $P$  označujeme  $W$  (západ), uzel napravo se označujeme  $E$  (východ). Ve 2D případě označujeme další uzly  $N$  (sever),  $S$  (jih). Ve 3D další uzly označujeme  $T$  (nad),  $B$  (pod).  $\delta x_{PE}$ ,  $\delta x_{PW}$  a podobné označují vzdálenosti mezi uzly  $P$   $E$ , respektive  $W$   $P$ . Při řešení úloh budeme často potřebovat hodnoty proměnných na stěnách kontrolních objemů. Například pro  $\Gamma$  označíme hodnotu difuzního koeficientu na východní stěně  $\Gamma_e$ , a obdobně  $\Gamma_w$  hodnotu na stěně západní, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Označení vedlejších uzlů

Z obrázku 3 je vidět, že kontrolní objemy volíme tak, aby stěny objemů splývaly s hranicemi domény.



Obrázek 3: Diskretizovaná doména

## 2.2 Integrace přes kontrolní objemy

Dalším krokem je integrace rovnice popisující úlohu přes kontrolní objemy. Integerujeme-li rovnici (2.1) dostaneme

$$\iiint_V \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \iiint_V S dV = 0. \quad (2.2)$$

Poté trojné integrály prvků rovnice, ve kterých se vyskytuje divergence, převedeme na plošné integrály pomocí Gauss-Ostogradského věty [2]. Integrály ve kterých se divergence nevyskytuje, vyhodnotíme klasicky. To znamená vynásobíme objemem, přes který integrujeme

$$\iint_A \Gamma \frac{d\phi}{dx} dA + SV = 0. \quad (2.3)$$

Po vyhodnocení integrálů a lineární aproximaci zdrojového členu, dostaneme

$$SV = S_u + S_p \phi_P, \quad (2.4)$$

$$\left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + S_u + S_p \phi_P = 0. \quad (2.5)$$

Hodnoty  $\phi$  a  $\Gamma$  jsou definované urostřed kontrolních objemů, ale my potřebujeme získat hodnoty gradientu a difuzního koeficientu na stěnách. Proto gradienty numericky odhadneme a difuzní koeficienty získáme interpolací. Interpolace nám bude stačit lineární a gradienty odhadneme dvoubodově

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}, \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_P}{2}, \quad (2.8)$$

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2}. \quad (2.9)$$

Po dosazení do rovnice (2.5) dostaneme

$$\Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + S_u + S_p \phi_P = 0. \quad (2.10)$$

Přenásobíme  $-1$  a přeuspořádáme

$$\phi_P \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{PW}} - S_p \right) - \phi_E \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} - \phi_W \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{PW}} = S_u. \quad (2.11)$$

dostáváme rovnici, která reprezentuje diskretizovanou formu rovnice (2.1). Pro snadnější orientaci se rovnice (2.11) přepisuje jako

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E - a_W \phi_W = S_u, \quad (2.12)$$

kde

$$\begin{aligned} a_P &= a_W + a_E - S_p, \\ a_E &= \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}, \\ a_W &= \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{PW}}. \end{aligned}$$

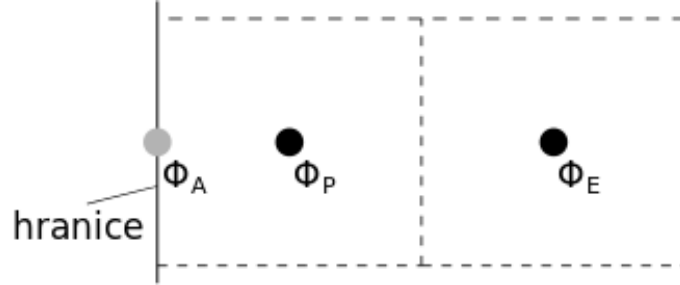
Jsou-li všechny uzlové body ve stejných vzdálenostech od sebe navzájem, můžeme nahradit  $\delta x_{PW} = \delta x_{PE} = \delta x$ . Což znamená, že

$$\begin{aligned} a_E &= \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x}, \\ a_W &= \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x}. \end{aligned}$$

### 2.3 Okrajové podmínky

V minulé části jsme odvodili tvar rovnice pro obecný prvek P. Nyní je třeba se podívat jak bude rovnice vypadat na krajích domény. Na krajích budeme uvažovat dvě možnosti. Bud' je zadána konkrétní hodnota (tzv. Dirichletova podmínka) a nebo je zadána derivace (tzv. Neumannova podmínka). Nesmíme zapomenout, že hodnota je zadána na stěně

posledního kontrolního objemu, viz obrázek 4. Pro naše účely budeme uvažovat zadanou podmínku vlevo. Stejný postup by fungoval i pro podmínku vpravo. Nejdříve se budu zabývat Dirichletovou podmínkou, tedy  $\phi(A) = \phi_A$ .



Obrázek 4: Okraj domény

Pro zahrnutí **Dirichletovy** podmínky do výpočtu začneme u rovnice (2.5). Vzdálenost od uzlu P ke stěně, na které je předepsaná podmínka, označíme  $\delta x_{AP}$ . Protože máme zadanou hodnotu na západní stěně, změníme aproximaci západní derivace

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)_w = \frac{\phi_P - \phi_A}{\delta x_{AP}}$$

Nyní můžeme dosadit do rovnice (2.5)

$$\begin{aligned} \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_A}{\delta x_{AP}} + S_u + S_P \phi_P &= 0, \\ \phi_P \left( \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{AP}} - S_P \right) - \phi_E \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}} &= S_u + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{AP}} \phi_A. \end{aligned}$$

Přeznačením dostaneme

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E = S_u + a_W \phi_A, \quad (2.13)$$

kde

$$\begin{aligned} a_P &= a_E - S_P^*, \\ a_E &= \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{PE}}, \\ a_W &= \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{AP}}, \\ S_P^* &= S_P - a_W. \end{aligned}$$

Budeme-li uvažovat grid s uniformními vzdálenostmi pak  $\delta x_{PE} = \delta x$ , ale  $\delta x_{AP} = \frac{\delta x}{2}$ .

Ted' k **Neumannově** podmínce, máme zadanou derivaci obecné proměnné  $\phi$  v bodě B, tedy

$$\left(\frac{d\phi}{dx}\right)(B) = q_B \quad (2.14)$$

Tu si dosadíme do rovnice (2.5)

$$\Gamma_e A_e q_B - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + SV = 0. \quad (2.15)$$

A nyní pokračujeme stejně jako jsme postupovali při obecné rovnici. Nejprve numericky odhadneme zbývající derivaci. Potom rovnici přeuspořádáme a konstanty převedeme na pravou stranu

$$\begin{aligned} \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} - \Gamma_e A_e q_B + SV &= 0, \\ \phi_P \left( \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} - S_p \right) - \phi_W \Gamma_w A_w &= S_u + \Gamma_e A_e q_B. \end{aligned}$$

Nakonec si můžeme rovnici zase přeznačit

$$-a_W \phi_W + a_P \phi_P = S_u + \Gamma_e A_e q_B, \quad (2.16)$$

kde

$$\begin{aligned} a_P &= a_W - S_p, \\ a_W &= \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}}. \end{aligned}$$

## 2.4 Sestavení matice a vektoru pravých stran

Výslednou matici sestavíme z diskretizovaných rovnic pro každý kontrolní objem. Konkrétní hodnoty koeficientů v rovnicích záleží na zadání a na použitém diferencování. Hodnoty vektoru pravých stran se skládají z konstantních částí linearizovaných zdrojů a také z příspěvku vycházejících z okrajových podmínek. Matice je pro 1d úlohy 3-diagonální a vypadá takto, uvažujeme-li na levém okraji Dirichletovu podmínku a na pravém okraji Neumannovu podmínku

$$\begin{pmatrix} a_{1,P} & -a_{1,E} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2,W} & a_{2,P} & a_{2,E} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_{3,W} & a_{3,P} & -a_{3,E} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a_{n-1,W} & a_{n-1,P} & -a_{n-1,E} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{n,W} & a_{n,P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,u} + \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{WP}} \phi_A \\ S_{2,u} \\ \vdots \\ \vdots \\ S_{n-1,u} \\ S_{n,u} + \Gamma_{n,e} A_{n,e} q_B \end{pmatrix},$$

kde  $n$  je počet kontrolních objemů.

### Příklad 1.

Na příkladu si ukážeme sestavení matice a pravé strany. Budeme uvažovat, že úloha je

popsána rovnicí (2.1), kde  $S = 1$ ,  $A = 1$  a  $\Gamma = 1$ . Na levém okraji máme předepsanou hodnotu  $\phi_A = 1$ , na pravém okraji máme předepsanou derivaci  $(\frac{d\phi}{dx})(B) = 0$ . Délka domény na které budeme počítat je 1 a použijeme 5 kontrolních objemů. Takže  $\delta x = 1/5 = 0.2$ . Zadaná úloha vypadá takto

$$\frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) + S = 0, \phi(0) = 1, \frac{d\phi(1)}{dx} = 0.$$

Nejprve tedy rozdělíme doménu na pět částí, poté rovnici diskretizujeme pro každou z nich. Pro kontrolní uzly 2-4 použijeme vztah (2.12), pro uzel 1 využijeme vztah (2.13), pro uzel 5 vztah (2.16).

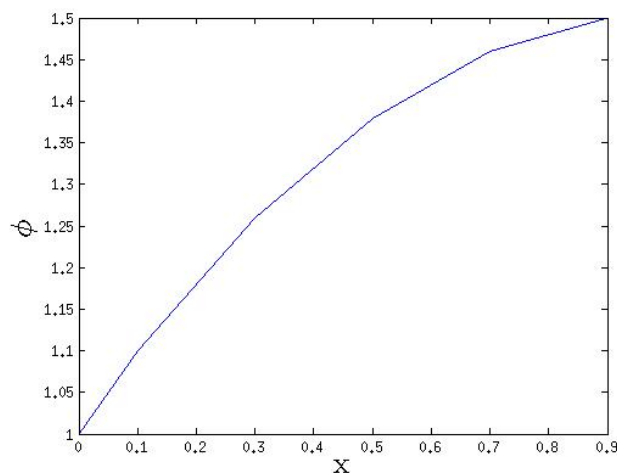
Tedy už tedy můžeme sestavit matici a pravou stranu

$$\begin{pmatrix} 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{pmatrix}.$$

Nyní už zbývá jen vyřešit sestavenou matici. K tomuto účelu můžeme využít jakoukoli metodu určenou k řešení soustav lineárních rovnic například metodu sdružených gradientů[6]. Řešením je

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.26 \\ 1.38 \\ 1.46 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Řešení je znázorněno na obrázku 5.



Obrázek 5: Výsledky příklad 1

### 3 Metoda konečných objemů - proudění

Ted' se podíváme na rovnici, v které je zahrnut i vliv proudění

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}(\Gamma \frac{d\phi}{dx}) + S. \quad (3.1)$$

Pravou stranu už známe, ta popisuje difuzi obecné proměnné  $\phi$  a  $S$  je vznik nebo zánik  $\phi$ . Levá strana popisuje změnu  $\phi$  v důsledku proudění.  $\rho$  je hustota a  $u$  je rychlost.

Nyní se můžeme pustit do řešení části rovnice, která popisuje proudění. V této chvíli uvažujeme, že rychlost v rovnici je dána a hustota  $\rho$  je konstantní. Budeme postupovat stejně jako při řešení samotné difuze (2.5). Po zintegrování rovnice a převedení na plošné integrály dostaneme

$$\iint_A \rho u \phi dA = \iint_A \Gamma \frac{d\phi}{dx} dA + \iiint_V S dV, \quad (3.2)$$

nyní vyhodnotíme integrály

$$(\rho u \phi A)_e - (\rho u \phi A)_w = (\Gamma A \frac{d\phi}{dx})_e - (\Gamma A \frac{d\phi}{dx})_w + SV. \quad (3.3)$$

#### 3.1 Centrální diferencování

Pravou stranu rovnice jsme už vyřešili v předchozí kapitole. Otázka je, jak vyhodnotit hodnoty obecné proměnné  $\phi$  na krajích kontrolních objemů. Máme víc možností. Jednou je opět uvažovat lineární rozložení hodnot mezi kontrolními uzly. Takže hodnota na stěně se získa zprůměrováním sousedících hodnot ve kontrolních uzlech. Tomuto přístupu se říká centrální diferencování. Pro stejné vzdálenosti mezi uzly platí toto

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}, \quad (3.4)$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\phi_E + \phi_P}{2} u_e A_e - \frac{\phi_W + \phi_P}{2} u_w A_w = \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + SV. \quad (3.6)$$

Pro lepší čitelnost se zavádí označení  $F$  pro prvky, které ovlivňují proudění a  $D$  pro prvky, které ovlivňují difuzi, tedy

$$F_e = \rho_e u_e A_e, \quad (3.7)$$

$$F_w = \rho_w u_w A_w, \quad (3.8)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\Delta x}, \quad (3.9)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\Delta x}. \quad (3.10)$$

Přeznačením a přeorganizováním dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{F_e}{2}\phi_E + \frac{F_e}{2}\phi_P - \frac{F_e}{2}\phi_W - \frac{F_e}{2}\phi_P &= D_e\phi_E - D_e\phi_P - D_w\phi_P + D_w\phi_W + SV, \\ \phi_P\left(\frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + D_e + D_w - S_p\right) + \phi_E\left(\frac{F_e}{2} - D_e\right) + \phi_W\left(-\frac{F_w}{2} - D_w\right) &= S_u. \end{aligned}$$

Rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$a_P\phi_P - a_E\phi_E - a_W\phi_W = S_u, \quad (3.11)$$

kde

$$\begin{aligned} a_P &= a_E + a_W + (F_e - F_w) - S_p, \\ a_E &= D_e - \frac{F_e}{2}, \\ a_W &= D_w + \frac{F_w}{2}. \end{aligned}$$

Nevýhodou centrálního diferencování je, že hodnota na stěně kontrolního objemu je ovlivněna stejnou měrou zprava i zleva bez ohledu na sílu proudění. Této vlastnosti, tedy jestli metoda bere v potaz směr proudění, se říká transportivnost. Proto je centrální diferencování nevhodné pro úlohy, ve kterých se vyskytují silné proudy, jak popisují Versteeg a Malalasekera [1, str. 110-114]. Pro porovnání síly proudění proti síle difuze používáme Pecletovo číslo

$$Pe = \frac{F}{D}. \quad (3.12)$$

Centrální diferencování funguje dobře pro  $Pe < 2$ , tedy funguje dobře, dokud je vliv proudění menší než dvojnásobek vlivu difuze.

### 3.2 Upwind

Nevýhodu centrálního diferencování se snaží napravit metoda zvaná upwind. Ta funguje tak, že hodnota na stěně kontrolního objemu je ovlivněna jen kontrolním objemem proti proudu před ní.

Pokud je tedy hodnota  $u$  větší než nula (proud jde zleva doprava) přejde  $\phi_w$  v  $\phi_W$  a hodnota  $\phi_e$  v  $\phi_P$ . Pokud je hodnota  $u$  menší než nula (proud jde zprava doleva) přejde  $\phi_e$  v  $\phi_E$  a  $\phi_w$  v  $\phi_P$ . Diskretizovaná rovnice potom vypadá takto



$$\begin{aligned}
& \text{Pro } u_e > 0, u_w > 0, \\
& F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta_{PE}} - D_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta_{PW}} + SV, \\
& \phi_P(F_e + D_e + D_w) - \phi_E D_e - \phi_W(F_w + D_w) = SV.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Pro } u_e < 0, u_w < 0, \\
& F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta_{PE}} - D_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta_{PW}} + SV, \\
& \phi_P(-F_w + D_e + D_w) - \phi_E(-F_e + D_e) - \phi_W D_w = SV.
\end{aligned}$$

Ve zkrácené formě

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E - a_W \phi_W = SV,$$

kde pro  $u_e > 0, u_w > 0$  máme

$a_P$	$a_W$	$a_E$
$a_E + a_W + (F_e - F_w) - S_p$	$D_e$	$F_w + D_w$

a pro  $u_e < 0, u_w < 0$  máme

$a_P$	$a_W$	$a_E$
$a_E + a_W + (F_e - F_w) - S_p$	$-F_e + D_e$	$D_w$

Upwind má všechny vlastnosti, které požadujeme, aby metoda konvergovala bez ohledu na sílu proudění. Zmíněné vlastnosti jsou, výsledná matice je diagonálně dominantní, metoda zachovává  $\phi$  přes celou doménu, zohledňuje směr proudění, více viz [1, str. 118-120]. I přesto má jednu nevýhodu a tou je jeho přesnost. Ta je jen prvního řádu.

### 3.3 Hybridní diferencování

Výhody centrálního diferencování a upwindu spojuje metoda hybrid. Ta se pro Pecletova čísla menší než 2 chová jako centrální diferencování a při Pecletově číslu větším než 2 se chová jako upwind s tím, že vliv difuze zanedbává úplně. A proč tedy pro Pecletovo číslo více než 2? Protože potom je vliv proudění větší než vliv difuze a v takovém případě centrální diferencování má chybné výsledky, jak už jsme naznačili výše. Diskretizovanou rovnici s použitím metody hybrid můžeme zapsat takto

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E - a_W \phi_W = SV,$$

kde pro  $|\text{Pe}| < 2$

$a_P$	$a_W$	$a_E$
$a_E + a_W + (F_e - F_w) - S_p$	$D_w - \frac{F_w}{2}$	$D_e - \frac{F_e}{2}$

pro  $|Pe| > 2, u > 0$

$a_P$	$a_W$	$a_E$
$a_E + a_W + (F_e - F_w) - S_p$	$F_w$	0

pro  $|Pe| > 2, u < 0$

$a_P$	$a_W$	$a_E$
$a_E + a_W + (F_e - F_w) - S_p$	0	$F_e$

### 3.4 Okrajové podmínky

Opět budeme řešit, jak vypadá diskretizovaná rovnice na okraji výpočetní domény. Část rovnice je stejná jako rovnice uvažovaná v minulé kapitole, proto se budeme zabývat jen těmi částmi rovnice, které jsme v minulé kapitole neřešili. Opět budeme uvažovat zadanou okrajovou podmínku na levém konci domény, pro další okraje by se podmínky řešily analogicky.

Při **Dirichletově** podmínce žádná komplikace nenastává. Protože hodnotu na západní stěně máme zadanou, nepoužíváme žádné z diferenčních schémat pro vyhodnocení hodnoty  $\phi$  na západní stěně. Zadanou hodnotu dosadíme do rovnice (3.3)

Výraz obsahující předepsanou hodnotu převedeme na pravou stranu a zbývající neznámé aproximujeme, tak jak bylo ukazáno v této kapitole a předchozí. Nakonec tedy dostaneme

$$a_P \phi_P - a_E \phi_E = SV + F_w \phi_A + D_w \phi_A, \quad (3.13)$$

kde hodnoty koeficientů  $a$  záleží na použitém diferencování.

Nyní budeme uvažovat **Neumannovu** podmínku zadanou na pravém okraji. Tedy  $(\frac{d\phi(B)}{dx})_e = q_B$ . Dosadíme-li do rovnice (3.3) dostáváme

$$\rho_e u_e \phi_e A_e - \rho_w u_w \phi_w A_w = \Gamma_e A_e q_B - (\Gamma A \frac{d\phi}{dx})_w + SV. \quad (3.14)$$

Pravou stranu rovnice (3.14) jsme vyřešili v předchozí kapitole, proto se jí už nemusíme zabývat. Otázkou tedy je, jak vyhodnotit hodnotu  $\phi_e$  známe-li derivaci na východní straně. Odpověď může záležet i na použitém diferencování. Použijeme-li upwind a  $u > 0$  pak  $\phi_e = \phi_P$ . My zde použijeme lineární interpolaci mezi  $\phi_w$  a  $\phi_e$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_w + \phi_e}{2} &= \phi_P, \\ \phi_e &= 2\phi_P - \phi_w. \end{aligned}$$

Vztah tedy můžeme využít, pro dosazení do rovnice (3.14)

$$\rho_e u_e A_e (2\phi_P - \phi_w) - \rho_w u_w \phi_w A_w = \Gamma_e A_e q_B - (\Gamma A \frac{d\phi}{dx})_w + SV. \quad (3.15)$$

No a nyní záleží opět na použitém diferencování, my zde použijeme centrální diferencování, tedy

$$\rho_e u_e A_e (2\phi_P - \frac{\phi_W}{2} - \frac{\phi_P}{2}) - \rho_w u_w A_w \frac{\phi_W + \phi_P}{2} = (\Gamma A q_B)_e - \Gamma_w A_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} + SV.$$

Použijeme vztahy (3.7), (3.8), (3.10)

$$\begin{aligned} F_e(-\frac{\phi_W}{2} + \frac{3\phi_P}{2}) - F_w \frac{\phi_W}{2} - F_w \frac{\phi_P}{2} &= \Gamma_e A_e q_B - D_w(\phi_P - \phi_W) + SV, \\ -\phi_W(\frac{F_e}{2} + \frac{F_w}{2} + D_w) + \phi_P(\frac{3F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + D_w - S_p) &= \Gamma_e A_e q_B + S_u. \end{aligned}$$

Nyní tedy máme rovnici pro krajní kontrolní objem, který má na východní stěně zadanou Neumannovu podmínku.

### 3.5 Sestavení matice a vektoru pravé strany

Výsledná matice bude vypadat velmi podobně jako matice z kapitoly o čisté difuzi. Proto se v této části zaměřím na to, jak vypadá soustava lineárních rovnic sestavená za použití centrálního diferencování, při Pecletově čísle větším než 2.

#### Příklad 2.

Budeme řešit úlohu zadanou rovnicí (3.1). V tomto příkladě budeme používat centrální diferencování. Délka domény je  $L = 1$ , koeficient difuze je  $\Gamma = 0.1$  a hustota je  $\rho = 1$ . Máme zadané okrajové podmínky  $\phi(0) = 1$  a  $\phi(L) = 0$  a rychlost  $u = 2.5 \text{ m/s}$ . Takže  $F = \rho u A = 2.5$ ,  $D = \frac{\Gamma A}{\delta x} = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$ . Pecletovo číslo je tedy všude  $\frac{F}{D} = \frac{2.5}{0.5} = 5$ .

Rovnice pro uzly 2-5 je rovnice (3.11). Pro uzel 1 využijeme rovnici (3.13). Uzel 5 popisuje rovnice analogická k (3.13), jen místo hodnoty na levé stěně je dána hodnota na stěně pravé. Po dosazení vypadá soustava rovnic takto

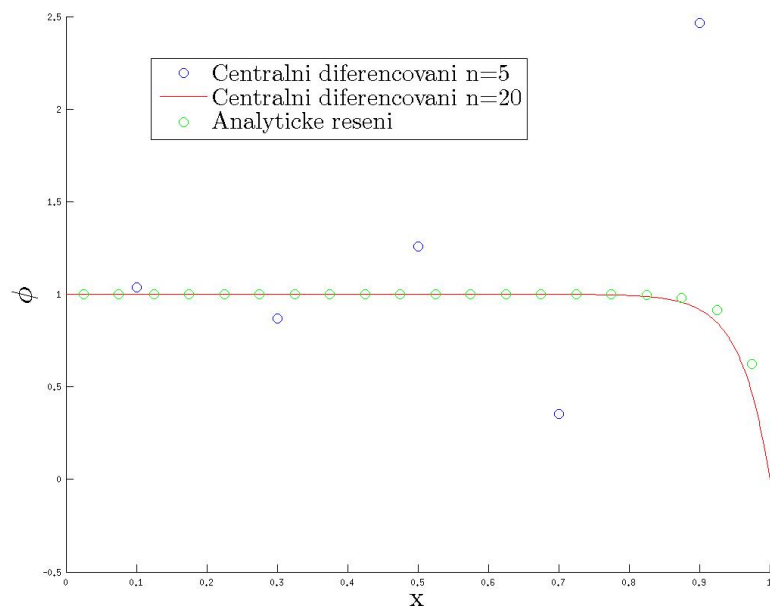
$$\begin{pmatrix} 2.75 & 0.75 & 0 & 0 & 0 \\ -1.75 & 1 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 1 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & -1.75 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0 & -1.75 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení soustavy je

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0356 \\ 0.8694 \\ 1.2573 \\ 0.3521 \\ 2.4644 \end{pmatrix}.$$

Porovnání s analytickým řešením je znázorněno na obrázku 6. Je vidět, že se naše řešení moc neshoduje s analytickým řešením. Je to dáno právě tím, že centrální diferencování

nijak nezohledňuje směr toku[1]. Změníme-li poměr vlivu proudění vůči vlivu difuze, aby tento poměr byl menší než 2, pak bude centrální diferencování dávat rozumné výsledky. Tohoto můžeme docílit tím že, použijeme více kontrolních objemů. Použijeme-li 20 uzlů bude  $F = \rho u A = 2.5$  stále stejně a  $D = \frac{\Gamma A}{\delta x} = \frac{0.1}{0.05} = 2$ . Pak bude Pecletovo číslo  $\frac{F}{D} = 1.25$  pro každý prvek. Z obrázku 6 je vidět, že počítáme-li s 20 prvky je shoda s analytickým řešením velmi dobrá i přes použití centrálního diferencování.



Obrázek 6: Výsledek příklad 2

## 4 SIMPLE

Při řešení úlohy proudění a difuze jsme předpokládali, že rychlost proudění je nám známa. Obecně to nevíme. Pro řešení tohoto typu úlohy, kdy jsou rychlosti neznámé, se používá algoritmus SIMPLE vyvinutý Patankarem a Spaldingem[3] a jeho variace SIMPLER, SIMPLEC. My zde popíšeme pouze základní SIMPLE.

Řešení úlohy, kde nemáme zadané rychlosti, je popsáno Navier-Stokesovými rovnicemi. Ty zde uvádíme ve formě, ve které je budeme používat my

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \quad (4.3)$$

Rovnice 4.3 je rovnice kontinuity. Rovnice (4.1) a (4.2) jsou stejné rovnice jako jsme měli při řešení úloh proudění a difuze, kde zdrojový člen vycházející z tlakových gradientů je osmamostatněn, aby byla zřejmá jeho důležitost. A obecná proměnná  $\phi$  je nahrazena rychlostí v ose  $x$   $u$ , respektive rychlostí v ose  $y$   $v$ .

Na levé straně rovnice se vyskytují nelineární členy. Pro řešení tohoto problému si rovnice (4.1), (4.2) přeznačíme

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^* u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^* u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^* v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^* v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v. \quad (4.5)$$

Po zdiskretizování rovnic  $u^*$  a  $v^*$  odhadneme (třeba nulou) a rovnice vyřešíme. Tím se dostaneme blíž ke správné hodnotě  $u$  a  $v$ . Kdybychom nějakým způsobem věděli hodnoty tlakových gradientů pro všechny diskretizované rovnice, stačilo by rovnice řešit, dokud hodnoty  $u$  a  $v$  nebudou splňovat diskretizovanou rovnici kontinuity.

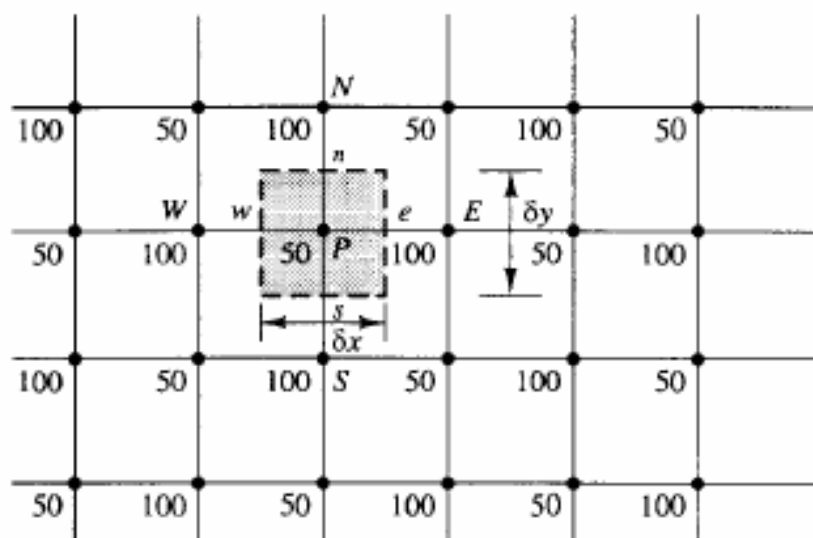
Nyní se pustíme do řešení derivace tlaku. Pomineme-li to, že zatím nevíme jak získat hodnoty tlaků, můžeme derivaci zkusit vyřešit stejně jako podobné derivace v předcházejících kapitolách, tedy

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\Delta x}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\frac{p_E + p_P}{2} - \frac{p_W + p_P}{2}}{\delta x}, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_E - p_W}{2\delta x}. \quad (4.8)$$

Nyní jsme dostali vztah pro derivaci, který vůbec neobsahuje hodnotu tlaku v bodě pro který počítáme. Uvažujeme-li rozložení tlaků jako na obrázku, 7

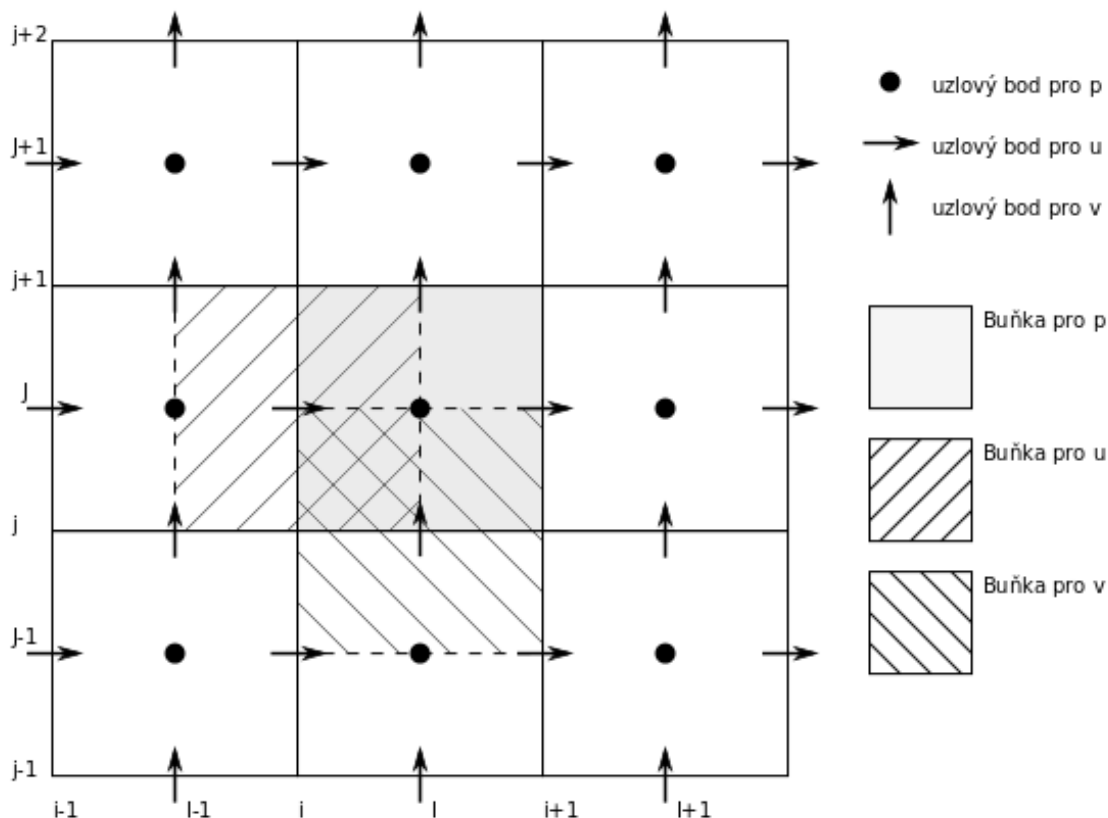


Obrázek 7: Šachovnicové pole tlaků [1, str. 137]

zjistíme, že takováto aproximace tlakové derivace není vhodná. Protože hodnoty tlaků jsou ob jedno políčko stejné, dostali bychom nulovou tlakovou derivaci pro všechna pole, což není odpovídající. Tento problém se dá vyřešit pomocí posunuté mřížky, na které počítáme rychlosti, a nebo použitím vícebodového odhadu derivace.

#### 4.1 Staggered Grid

Doposud jsme uvažovali, že rychlostní i tlakové pole budeme počítat pro stejné kontrolní objemy. Ale abychom vyřešili problém s aproximací tlakových derivací, budeme počítat rychlosti na stěnách kontrolního objemu tlaku. To znamená kontrolní uzly pro rychlost  $u$  posuneme na ose  $x$  mezi kontrolní objemy tlaků a kontrolní uzly pro rychlost  $v$  posuneme na ose  $y$  mezi kontrolní objemy tlaků. Důležité je, že posunování se provádí vždy jen na jedné ose, toto je znázorněno na obrázku 8.



Obrázek 8: Označování uzlů na Staggered gridu

Nyní si zavedeme nové značení uzlů. Uzly pro tlaky se označují velkými písmeny  $J, I$ , kde  $J$  představuje řádek a  $I$  sloupec. Uzly pro rychlosti  $u$  se značí velkým  $J$ , malým  $i$ , kde  $i$  označuje sloupec, který je uprostřed mezi  $I$  a  $I - 1$ . Uzly pro  $v$  se značí malým  $j$ , velkým  $I$ , kde  $j$  označuje řádek, který je uprostřed mezi  $J$  a  $J - 1$ , viz obrázek 8.

Nyní už tedy můžeme vyhodnotit tlakové derivace jako

$$\frac{\partial p}{\partial x_{i,J}} = \frac{p_{I-1,J} - p_{I,J}}{\Delta x}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_{I,j}} = \frac{p_{I,J} - p_{I,J+1}}{\Delta y}. \quad (4.10)$$

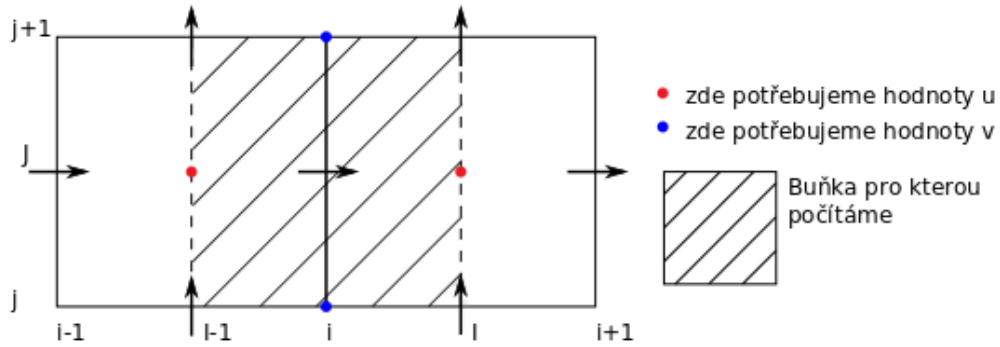
## 4.2 Diskretizované rovnice

Protože rovnice se kromě příspěvku tlaků neliší od rovnic, které jsme diskretizovali v minulých kapitolách, je diskretizovaná forma rovnice stejná jako v předchozím případě až na příspěvek tlakového gradientu. Tlaková derivace se vyhodnotí tak, jak jsme si ukázali v minulé sekci a potom se zintegruje přes objem, takže se vlastně vynásobí objemem.  $u$ -rovnice potom vypadají takto

$$a_P u_{i,J} = \Sigma a_{nb} u_{nb} + \frac{p_{I-1,J} - p_{I,J}}{\Delta x} V + SV, \quad (4.11)$$

$$a_P u_{i,J} = \Sigma a_{nb} u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J}) A_{i,J} + b_{i,J}. \quad (4.12)$$

V rovnicích pro získání nových hodnot  $u$ , se vyskytují i stávající hodnoty  $u$  i  $v$ . Stávající hodnoty máme uchovány ve středech kontrolních objemů, ale my je opět potřebujeme na stěnách kontrolních objemů, viz obrázek 9.



Obrázek 9: Buňka  $u$

Z tohoto důvodu interpolujeme hodnoty  $u$ ,  $v$ . Uvažujeme-li konstantní hustotu a konstantní koeficient difuze, potom vypadají koeficienty  $F$  a  $D$ , s interpolovanými hodnotami, takto

$$\begin{aligned} F_w &= (\rho u)_w = \rho \frac{u_{i,J} + u_{i-1,J}}{2}, \\ F_e &= (\rho u)_e = \rho \frac{u_{i+1,J} + u_{i,J}}{2}, \\ F_s &= (\rho v)_s = \rho \frac{v_{I,j} + v_{I-1,j}}{2}, \\ F_n &= (\rho v)_n = \rho \frac{v_{I,j+1} + v_{I-1,j+1}}{2}, \\ D_w &= \frac{\Gamma}{x_i - x_{i-1}}, \\ D_e &= \frac{\Gamma}{x_{i+1} - x_i}, \\ D_s &= \frac{\Gamma}{y_J - y_{J-1}}, \\ D_n &= \frac{\Gamma}{y_{J+1} - y_J}. \end{aligned}$$

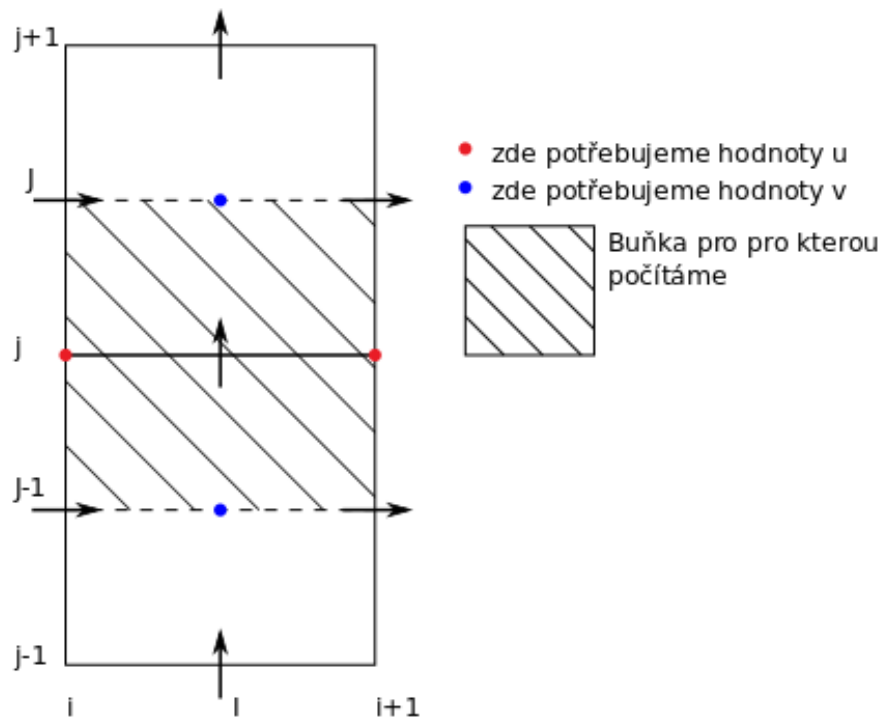
Koeficienty  $a$  budou v rovnici (4.12) vypadat v závislosti na použitém diferencování, avšak vždy to bude nějaká kombinace příslušných  $F$  a  $D$ .



Rovnice pro  $v$  vypadají obdobně

$$a_P v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_{I,j-1} - p_{I,j}) A_{I,j} + b_{J,i}. \quad (4.13)$$

Pro diskretizovanou rovnici  $v$  platí to stejné jako pro rovnici (4.12), potřebujeme získat hodnoty  $u, v$  na stěnách kontrolního objemu. Protože hodnoty  $v$  se počítají na jiné mřížce než hodnoty  $u$ , budou i použité interpolace vypadat jinak, viz obrázek 10.



Obrázek 10: Buňka  $v$

Opět budeme interpolovat hodnoty  $u$  a  $v$  a opět budeme předpokládat, že hustota a koeficient difuze jsou konstantní. Poté budou koeficienty  $F$  a  $D$ , s interpolovanými hodnotami,

vypadat takto

$$\begin{aligned}
 F_w &= \rho \frac{u_{i,J} + u_{i,J-1}}{2}, \\
 F_e &= \rho \frac{u_{i+1,J} + u_{i+1,J-1}}{2}, \\
 F_s &= \rho \frac{v_{I,j-1} + v_{I,J}}{2}, \\
 F_n &= \rho \frac{v_{I,J} + v_{I,j+1}}{2}, \\
 D_w &= \frac{\Gamma}{x_I - x_{I-1}}, \\
 D_e &= \frac{\Gamma}{x_{I+1} - x_I}, \\
 D_s &= \frac{\Gamma}{y_j - y_{j-1}}, \\
 D_n &= \frac{\Gamma}{y_{j+1} - y_j}.
 \end{aligned}$$

Koeficienty  $a$  v rovnici (4.13) budou opět záviset na použitém diferencování, ale budou to nějaké lineární kombinace příslušných  $F$  a  $D$ . V rovnici (4.12) označuje  $\Sigma a_{nb} u_{nb}$  sumu přes všechny sousedící prvky, obdobně to platí pro (4.13).

Diskretizovanou formu rovnice kontinuity (4.3) získáme klasickým zintegrováním přes objem, převedením na plošné integrály a vyhodnocením integrálů

$$\begin{aligned}
 \iiint_V \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dV + \iiint_V \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dV &= 0, \\
 \iint_A \rho u dA + \iint_A \rho v dA &= 0,
 \end{aligned}$$

$$[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}] + [(\rho u A)_{I,j+1} - (\rho u A)_{I,j}] = 0. \quad (4.14)$$

### 4.3 Tlakové pole

Nyní máme vyřešené problémy vycházející z nelineárnosti členů v rovnicích i tlakové derivace, ale zůstává problém odkud vůbec získat hodnoty tlaků. Opět odhadneme nějak hodnoty tlakového pole. Potom si z odhadnutých rychlostí a tlaků spočítáme diskretizované rovnice pro rychlosti, které nám dají lepší odhady rychlostí.  $u^*$  jsou proměnné, které počítáme. Je třeba dávat pozor na to, že i v koeficientech  $a$  se vyskytují  $u$  a  $v$ . To jsou současné hodnoty rychlostí

$$a_{i,J} u_{i,J}^* = \Sigma a_{nb} u_{nb}^* - (p_{I-1,J}^* + p_{I,J}^*) A_{i,J} + b_{i,J}, \quad (4.15)$$

$$a_{I,j} v_{I,j}^* = \Sigma a_{nb} v_{nb}^* - (p_{I,J-1}^* + p_{I,J}^*) A_{I,j} + b_{I,j}. \quad (4.16)$$

Ted' si zadefinujeme hodnoty, které splňují diskretizovanou rovnici kontinuity, jako naše rychlosti odhadnuté plus hodnota, o kterou se naše dvě rychlosti liší. Stejně to uděláme i pro tlak

$$u = u^* + u', \quad (4.17)$$

$$v = v^* + v', \quad (4.18)$$

$$p = p^* + p'. \quad (4.19)$$

Odečteme-li od (4.12) (4.15) a od (4.13) (4.16), získáváme

$$a_{i,J}(u_{i,J} - u_{i,J}^*) = \Sigma a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + (p_{I-1,J} - p_{I,J} - p_{I-1,J}^* + p_{I,J}^*)A_{i,J}, \quad (4.20)$$

$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \Sigma a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + (p_{I,J-1} - p_{I,J} - p_{I,J-1}^* + p_{I,J}^*)A_{I,j}. \quad (4.21)$$

A ted' použitím vztahů (4.17), (4.18)

$$a_{i,J}(u'_{i,J}) = \Sigma a_{nb}(u'_{nb}) + (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})A_{i,J}, \quad (4.22)$$

$$a_{I,j}(v'_{I,j}) = \Sigma a_{nb}(v'_{nb}) + (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})A_{I,j}, \quad (4.23)$$

dostáváme vztah pro získání rychlostních korekcí. Ted' vypustíme vliv ostatních uzlů z rovnic (4.22), (4.23), což je hlavní aproximace algoritmu SIMPLE. Takže dostáváme

$$a_{i,J}u'_{i,J} = (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})A_{i,J}, \quad (4.24)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})A_{I,j}. \quad (4.25)$$

Nyní podělíme rovnici (4.24) koeficientem  $a_{i,J}$ , rovnici (4.25) podělíme koeficientem  $a_{I,j}$

$$u'_{i,J} = (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})d_{i,J}, \quad (4.26)$$

$$v'_{I,j} = (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})d_{I,j}, \quad (4.27)$$

$$(4.28)$$

kde

$$d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}}, \quad (4.29)$$

$$d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}. \quad (4.30)$$

Ted' sice máme vztah pro získání korekcí rychlostí, ale stále nemáme vztah pro tlakové korekce. Ten dostaneme tak, že  $u$  v rovnici kontinuity (4.14) nahradíme součtem odhadnuté rychlosti  $u^*$  a korekce  $u'$ . Nyní využijeme odvozeného vztahu (4.26), kterým nahradíme  $u'$

$$(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J} + (\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j} = 0$$

$$\rho_{i+1,J}(u^* + u')_{i+1,J}A_{i+1,J} - \rho_{i,J}(u^* + u')_{i,J}A_{i,J} + \rho_{I,j+1}(v^* + v')_{I,j+1}A_{I,j+1} - \rho_{I,j}(v^* + v')_{I,j}A_{I,j} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{i+1,J} A_{i+1,J} u'_{i+1,J} - \rho_{i,J} A_{i,J} u'_{i,J} + \rho_{I,j+1} A_{I,j+1} v'_{I,j+1} - \rho_{I,j} A_{I,j} v'_{I,j} = \\
& \rho_{i,J} A_{i,J} u^*_{i,J} - \rho_{i+1,J} A_{i+1,J} u^*_{i+1,J} + \rho_{I,j} A_{I,j} v^*_{I,j} - \rho_{I,j+1} A_{I,j+1} v^*_{I,j+1} \\
& \rho_{i+1,J} A_{i+1,J} (p'_{I,J} - p'_{I+1,J}) d_{i+1,J} - \rho_{i,J} A_{i,J} (p'_{I-1,J} - p'_{I,J}) d_{i,J} + \\
& \rho_{I,j+1} A_{I,j+1} (p'_{I,J} - p'_{I,j+1}) d_{I,j+1} - \rho_{I,j} A_{I,j} (p'_{I,J-1} - p'_{I,J}) d_{I,j} = \\
& \rho_{i,J} A_{i,J} u^*_{i,J} - \rho_{i+1,J} A_{i+1,J} u^*_{i+1,J} + \rho_{I,j} A_{I,j} v^*_{I,j} - \rho_{I,j+1} A_{I,j+1} v^*_{I,j+1} \\
& [(\rho dA)_{i+1,J} + (\rho dA)_{i,J} + (\rho dA)_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j}] p'_{I,J} \\
& - (\rho dA)_{i+1,J} p'_{I+1,J} - (\rho dA)_{i,J} p'_{I-1,J} - (\rho dA)_{I,j+1} p'_{I,j+1} - (\rho dA)_{I,j} p'_{I,j-1} = \\
& \rho_{i,J} A_{i,J} u^*_{i,J} - \rho_{i+1,J} A_{i+1,J} u^*_{i+1,J} + \rho_{I,j} A_{I,j} v^*_{I,j} - \rho_{I,j+1} A_{I,j+1} v^*_{I,j+1} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Rovnici si klasicky přeznačíme

$$a_{I,J} p'_{I,J} - a_{I+1,J} p'_{I+1,J} - a_{I-1,J} p'_{I-1,J} - a_{I,J+1} p'_{I,j+1} - a_{I,J-1} p'_{I,j-1} = b'_{I,J}, \quad (4.32)$$

kde

$$\begin{aligned}
a_{I,J} &= a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}, \\
a_{I+1,J} &= (\rho dA)_{i+1,J}, \\
a_{I-1,J} &= (\rho dA)_{i,J}, \\
a_{I,J+1} &= (\rho dA)_{I,j+1}, \\
a_{I,J-1} &= (\rho dA)_{I,j}.
\end{aligned}$$

Nyní jsme dostali diskretizovanou rovnici tlakových korekcí.

#### 4.4 Relaxace

Protože jsme vypustili vliv okolních uzlů při odvozování rovnice tlakových korekcí, je algoritmus náchylný k divergenci. Proto se používá relaxace. Nové zrelaxované  $p$  získáme takto

$$p = p^* + \alpha_p p', \quad (4.33)$$

kde  $\alpha$  je z intervalu (0,1). Bohužel nejvhodnější hodnota  $\alpha_p$  závisí na konkrétní úloze. Veličiny  $u$  a  $v$  se také relaxují. Nové hodnoty veličin získáme z těchto vztahů

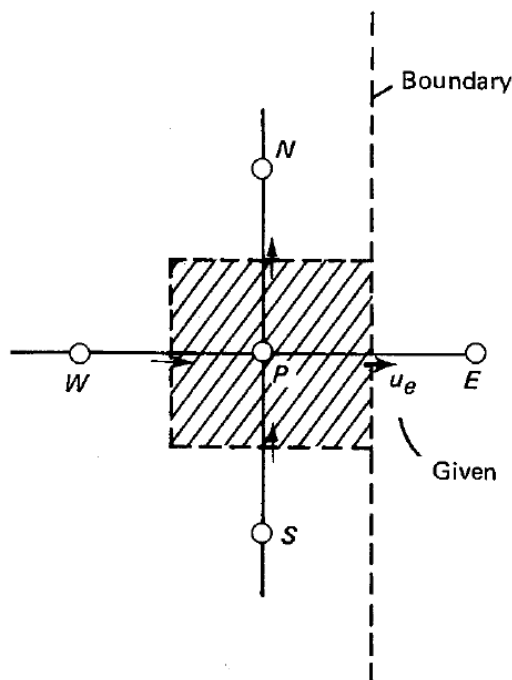
$$u^n = \alpha_u u^* + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)}, \quad (4.34)$$

$$v^n = \alpha_v v^* + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)}, \quad (4.35)$$

kde  $u^n$  reprezentují hodnoty, které jsme získali po provedení korekcí.  $u^{(n-1)}$  a  $v^{(n-1)}$  jsou hodnoty získané v předchozí iteraci algoritmu. A  $\alpha_u, \alpha_v$  jsou relaxační faktory opět v rozmezí (0,1).

#### 4.5 Okrajové podmínky pro rovnice tlakových korekcí

Okrajové podmínky u rychlostí se vynucují stejně jak bylo naznačeno v dřívějších kapitolách. V čem je tedy rozdíl u tlakových korekcí? Rozdíl je v tom, že rovnice tlakových korekcí nevycházejí z obecné rovnice pro  $\phi$ . Máme-li na hranici předepsanou rychlost, nahradíme součet odhadnuté rychlosti  $u^*$  a korekce  $w$  zadanou hodnotou. Což znamená, že příslušné  $p$  se v rovnici neobjeví a ve zdrojích nahradíme  $u^*$  zadanou hodnotou  $u$ .



Obrázek 11: Okrajová podmínka [1, str. 137]

#### 4.6 Shrnutí algoritmu

Nyní popíšeme celý algoritmus. Na začátku algoritmu uděláme odhad rychlostí  $u$ ,  $v$  a tlaků  $p$ . Odhady označujeme  $u^*$ ,  $v^*$ , respektive  $p^*$ . Nemáme-li po ruce nějaký lepší odhad, použijeme jako náš první odhad nuly. Poté z odhadnutých rychlostí a tlaků sestavíme matici diskretizovaných rovnic  $u$  a matici diskretizovaných rovnic  $v$ . Ty vyřešíme, čímž dostaneme nový, lepší odhad  $u^*$ ,  $v^*$ . Následně sestavíme matici rovnic tlakových korekcí a vyřešíme ji. Poté opravíme hodnoty  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $p^*$ . Pokud výsledné hodnoty splňují diskretizovanou rovnici kontinuity, s nějakou danou přesností  $\epsilon$ , algoritmus ukončíme a označíme  $u = u^*$ ,  $v = v^*$ ,  $p = p^* + c$ , v opačném případě proces opakujeme, jak je naznačeno zde 4.6. U tlaků není podstatná konkrétní hodnota, ale důležité jsou rozdíly, z kterých vznikají zdrojové členy pro rovnice rychlostí. Zmiňuje se o tom S. V. Patankar ve své knize Numerical Heat Transfer nad Fluid Flow[4].

---

**Algoritmus SIMPLE**

---

```
 $u^* = \mathbf{zeros}(nx, ny);$   
 $v^* = \mathbf{zeros}(nx, ny);$   
 $p^* = \mathbf{zeros}(nx, ny);$   
while convergence  
  [ $M_u$ , vectorU] = generateEquationsForU( $u^*$ ,  $v^*$ ,  $p^*$ );  
  [ $M_v$ , vectorV] = generateEquationsForV( $u^*$ ,  $v^*$ ,  $p^*$ );  
  
   $u^* = \text{solve}(M_u, \text{vectorU});$   
   $v^* = \text{solve}(M_v, \text{vectorV});$   
  
  [ $M_p$ , vectorP] = generateEquationsForPressureCorrections( $u^*$ ,  $v^*$ );  
  
   $p' = \text{solve}(M_p, \text{vectorP});$   
  
   $u^* = \text{correctU}(u^*, p');$   
   $v^* = \text{correctV}(v^*, p');$   
   $p^* = \text{correctP}(p^*, p');$   
end
```

---

## 5 Numerické experimenty

V této kapitole na daných úlohách představím výsledky, námi naimplementovaného algoritmu SIMPLE. Proudové členy rovnice vyhodnocujeme metodou hybrid. Pro řešení vzniklých soustav lineárních rovnic používáme MATLABovské lomítko. Přesnost, kterou používáme pro určení kdy ukončit algoritmus, je  $1 \times 10^{-9}$ . Protože výsledky se často v literatuře uvádějí jen podle Reynoldsova čísla, je potřeba ho zde představit

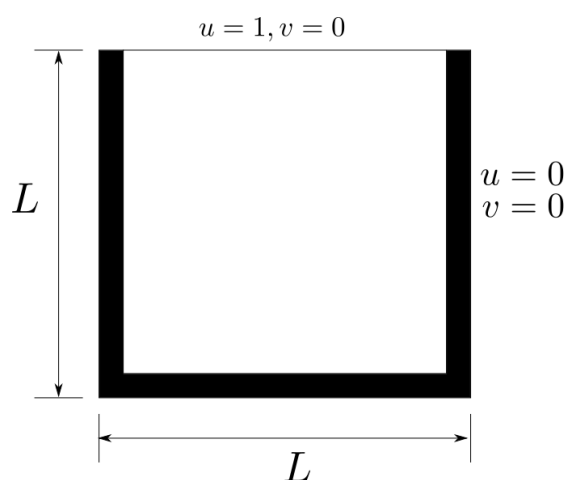
$$Re = \frac{\rho u L}{\mu},$$

kde  $\rho$  je hustota,  $\mu$  je dynamická viskozita,  $u$  je charakteristická rychlost a  $L$  je charakteristická vzdálenost pro úlohu. Čím větší je Reynoldsovo číslo, tím víc je úloha turbulentní.

### 5.1 Cavity

Jako první test jsem zvolil úlohu cavity. Je to úloha, která se často používá pro testování nových metod nebo nových výpočetních nástrojů, kvůli své jednoduché geometrii a jednoduchým okrajovým podmínkám.

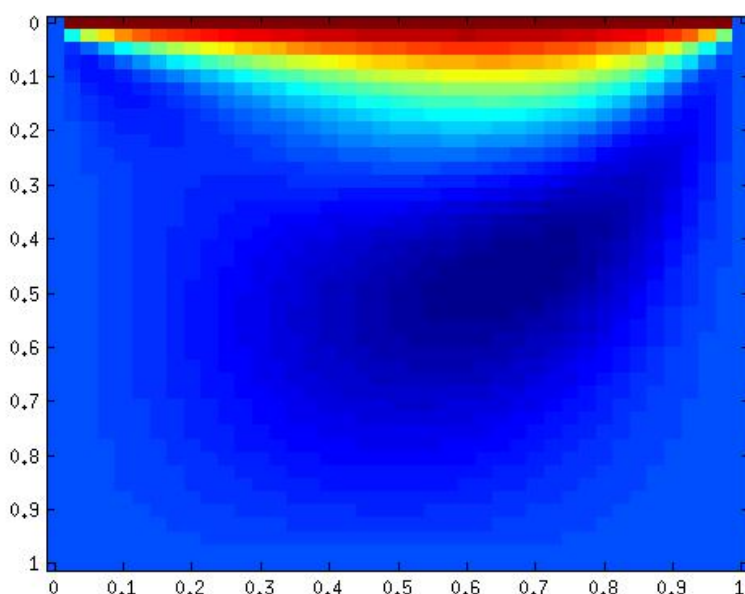
Úloha je zadána takto, tekutina je uzavřena ve čtvercové výduti ohraničené ze tří stran nepohyblivými stěnami a na horní straně pohyblivou stěnou s danou rychlostí ve směru tečny ke stěně, viz obrázek 12. To znamená, že na východní, západní, jižní straně mám zadanou Dirichletovu podmínku  $u = 0, v = 0$ . A na severní straně je zadána podmínka  $u = 1, v = 0$ . Strana výdutě je 1m. Hodnoty pro  $\rho, \mu$  volím v závislosti na požadovaném Reynoldsově čísle.



Obrázek 12: Zadání úlohy - cavity

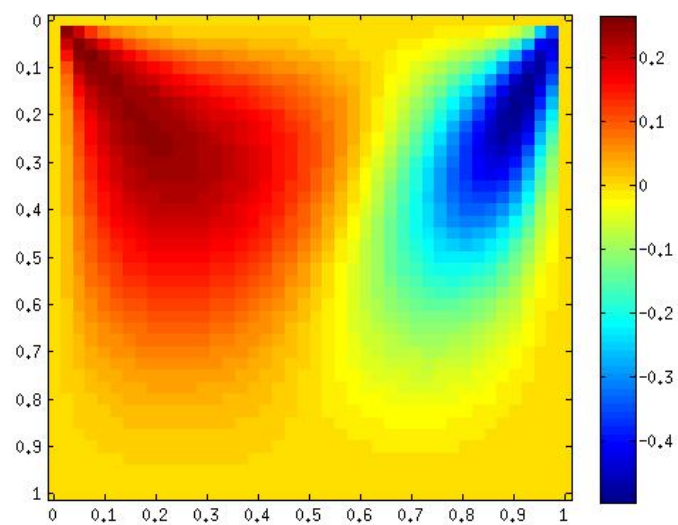
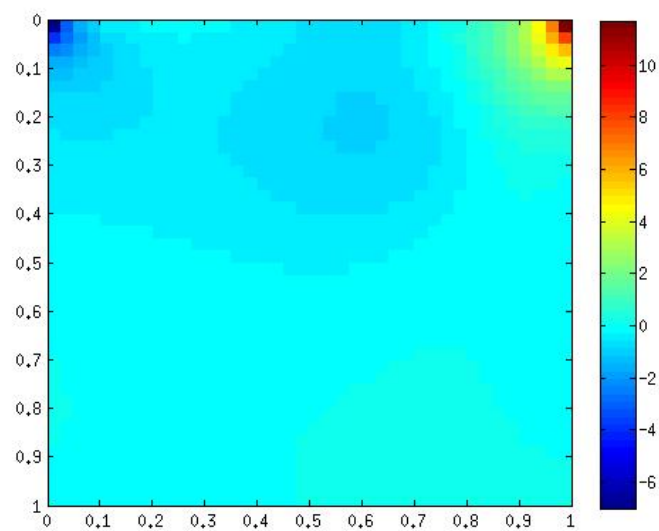
Výsledky srovnáváme s hodnotami z práce Ghia, Ghia a Shina[5]. Hodnoty  $u$  se porovnávají na vertikálním řezu vedeném středem cavity. Hodnoty  $v$  se porovnávají na horizontálním řezu vedeném středem cavity. Z obrázku 18 je vidět, že pro rychlosti  $u$  je

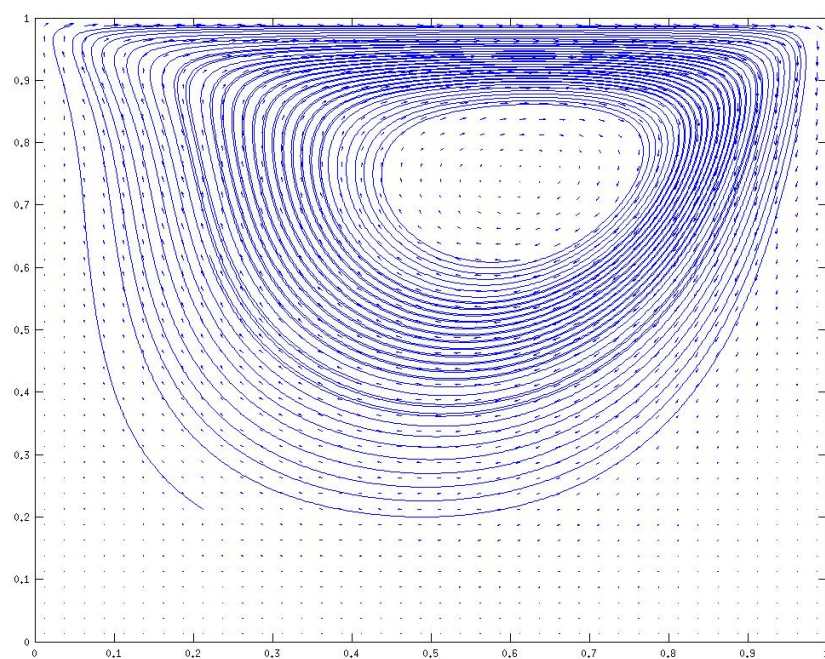
shoda velmi dobrá i přes to, že pro výpočet byla použita mřížka  $40 \times 40$  oproti  $129 \times 129$  v referenčním řešení. Oproti tomu u rychlostí  $v$  jsou vidět podstatné rozdíly, které mohou být způsobeny právě rozdílnou velikostí použité mřížky, viz obrázek 19. Při vykreslení proudnic jsou také patrné rozdíly především v pravém a levém dolním rohu cavity. Zatímco u referenčního řešení je patrná singularita, v našem řešení zobrazena není. Jako řešení těchto problémů se nabízí použití většího rozlišení mřížky, to by ale bylo časově i výpočetně náročné, především kvůli neoptimalizovanému kódu. Další možné řešení by bylo použití neuniformní mřížky tak, aby byla síť v dolních rozích hustší. Výsledky pro  $Re=100$  jsou představeny na obrázcích 13, 14, 15, 16.



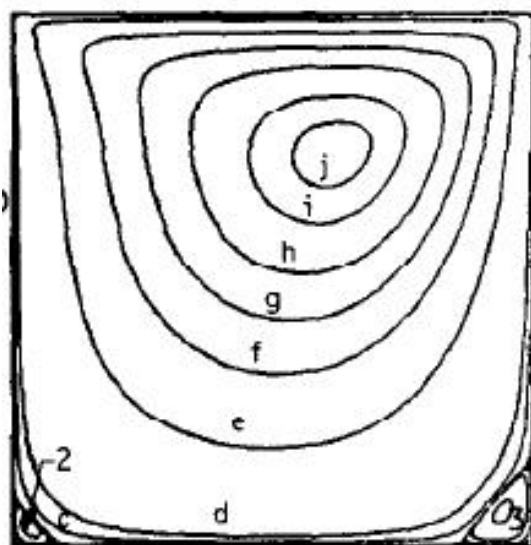
Obrázek 13: Numerické řešení  $u$



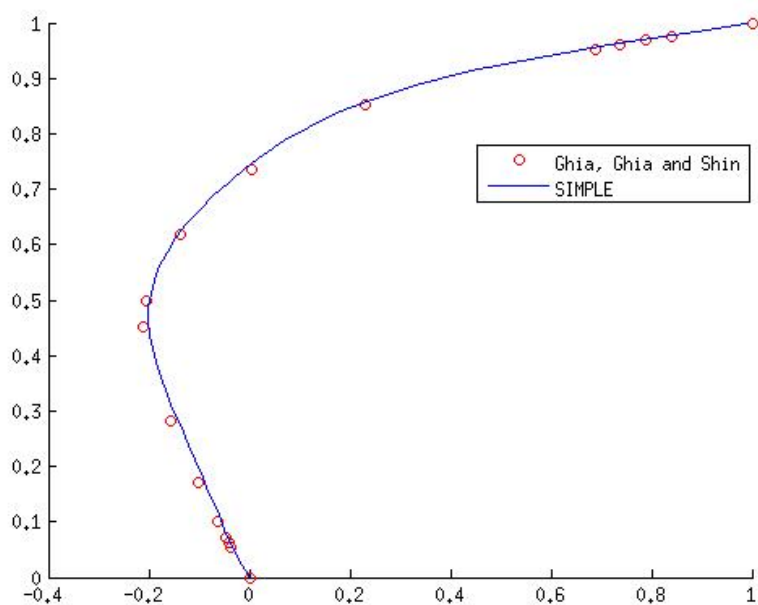
Obrázek 14: Numerické řešení  $v$ Obrázek 15: Numerické řešení  $p$



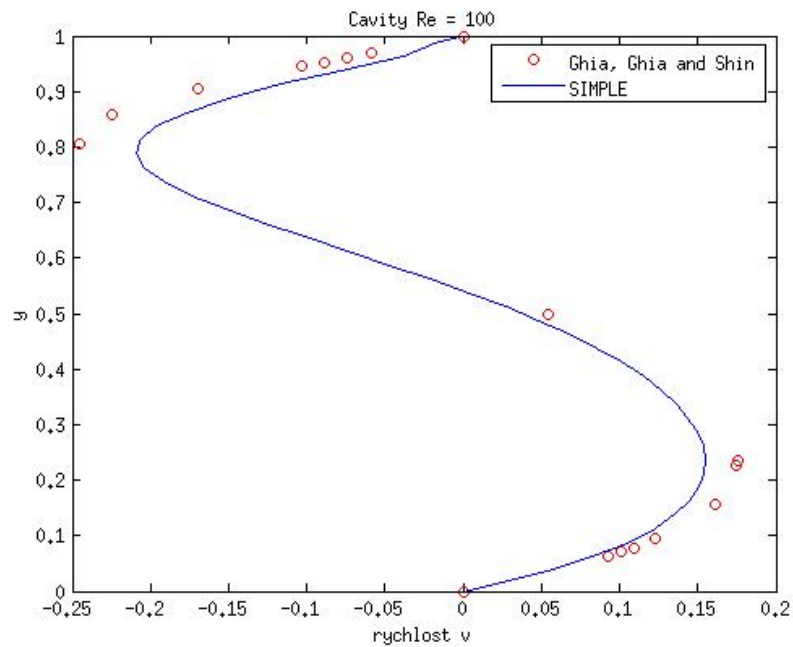
Obrázek 16: Proudnice



Obrázek 17: Proudnice Ghia [5]



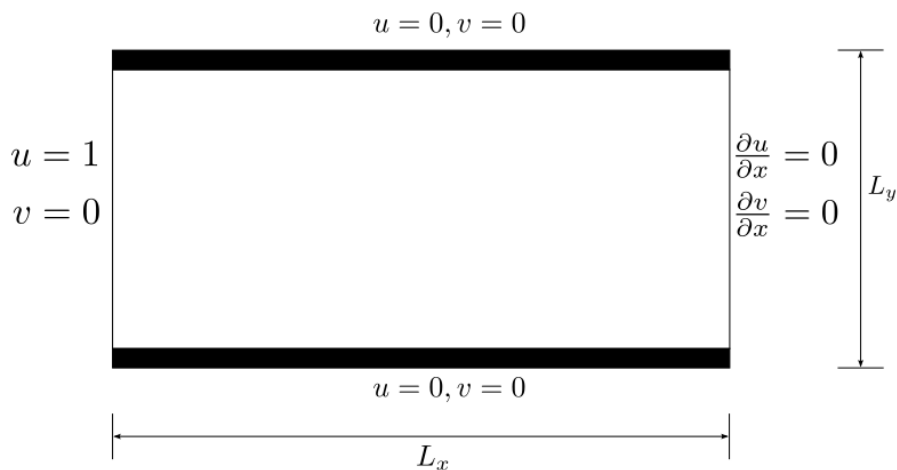
Obrázek 18: Porovnání výsledku  $u$  rychlostí pro  $y=0.5$



Obrázek 19: Porovnání výsledku  $v$  rychlostí pro  $x=0.5$

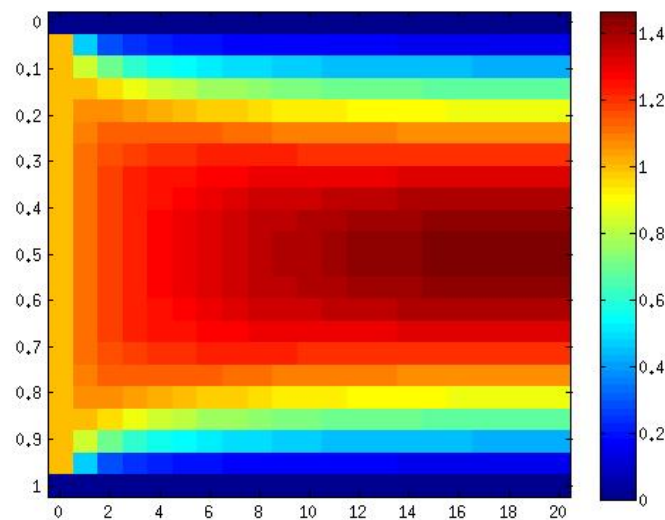
## 5.2 Tunel

Úloha tunel je zadána následovně, máme obdelník o stránkách  $L_x L_y$ , na levém okraji je zadáno  $u = 1$  a  $v = 0$ . Na horním a spodním okraji máme zadány nuly pro  $u$  i  $v$ . Na pravém konci tunelu je zadána nulová derivace pro obě rychlosti. Délka  $L_x$  je 10, délka  $L_y$  je 1. Budeme počítat na mřížce  $20 \times 20$ .

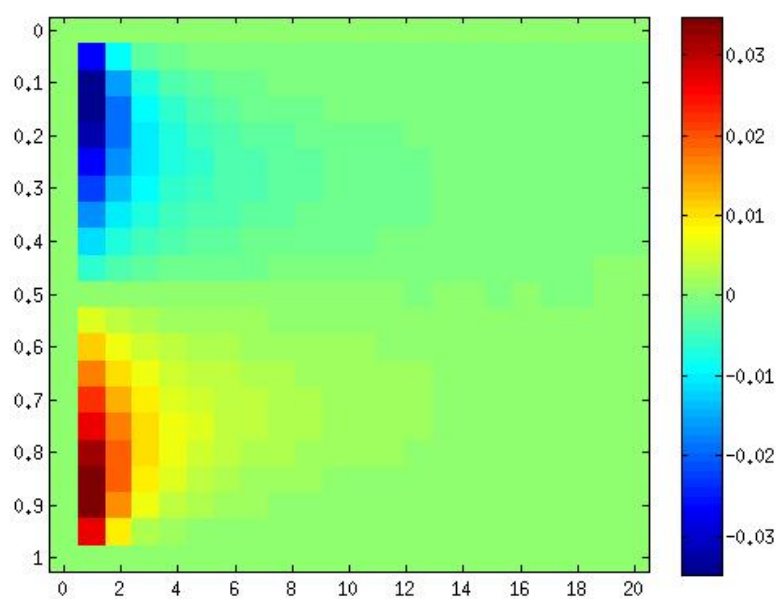
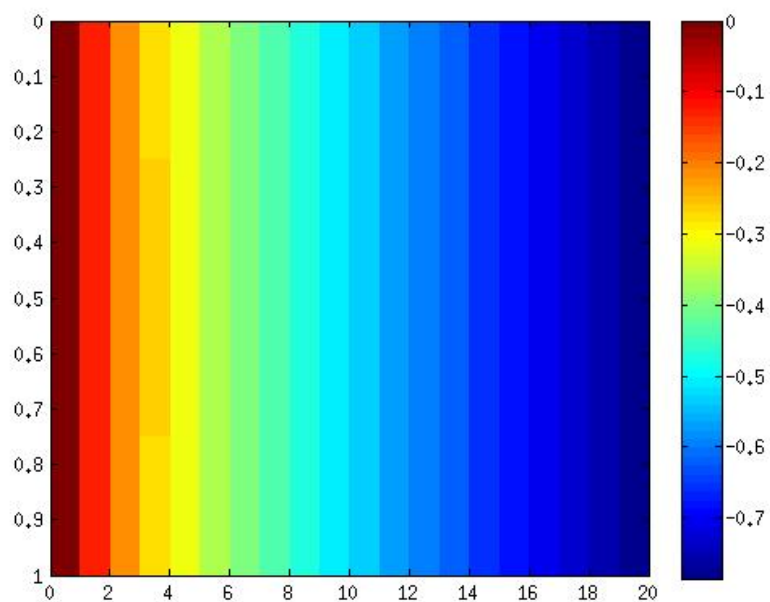


Obrázek 20: Zadání úlohy - tunel

Výsledky jsou zobrazeny na obrázcích 21, 22, 23.



Obrázek 21: Numerické řešení  $u$

Obrázek 22: Numerické řešení  $v$ Obrázek 23: Numerické řešení  $p$

## 6 Závěr

V práci jsme se seznámili s metodou konečných objemů a jejím využitím pro diskretizaci a numerické řešení parciálních diferenciálních rovnic. Metodu konečných objemů jsme uvedli na jednoduché diferenciální rovnici popisující difuzi v 1D. Na této úloze jsme předvedli vyhodnocení derivací a interpolaci hodnot. Dále jsme přešli k řešení rovnice proudění. Při aplikaci metody konečných objemů na rovnici proudění byla představena různá diferenční schémata pro vyhodnocení vlivu proudění a jejich vlastností. Na jednoduchém příkladu jsme předvedli vhodnost diferenčních schémat.

V další části práce jsme se seznámili s algoritmem SIMPLE, který se používá pro řešení Navier-Stokesových rovnic. Uvedli jsme problém s nelinearitou jednotlivých členů v Navier-Stokesových rovnicích, který algoritmus SIMPLE řeší použitím iteračního procesu. Dále byl představen problém s vyhodnocením tlakových gradientů, který se v algoritmu SIMPLE řeší použitím posunuté mřížky.

Na konci práce jsme použili algoritmus SIMPLE pro získání řešení ke dvěma typickým úlohám z oblasti mechaniky tekutin.

Vlastní implementace algoritmu SIMPLE by mohla být rozšířená o možnost využití neuniformní mřížky, případně o zrychlení výpočtu jeho paralelizací. Dále by se dalo uvažovat o řešení úloh ve třech dimenzích nebo řešení nestacionární úlohy.

## 7 Reference

- [1] VERSTEEG, H a W MALALASEKERA. An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. Longman Scientific and Technical: Wiley, 1995, ISBN 0470235152.
- [2] Bouchala, Vlach. Křivkový a Plošný integrál. Matematika pro inženýry 21. století, reg.č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332, [www.mi21.vsb.cz](http://www.mi21.vsb.cz)
- [3] S.V Patankar, D.B Spalding, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 15, Issue 10, October 1972, Pages 1787-1806, ISSN 0017-9310
- [4] Patankar, S. V. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor and Francis Group, New York.
- [5] U.Ghia, K N Ghia and C.T . Shin 1982. High Re solutions for Incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a Multigrid method. Journal of computational physics 48, 387- 411.
- [6] T. Kozubek, T. Brzobohatý, V. Hapla, M. Jarošová, A. Markopoulos, Lineární algebra s Matlabem. Matematika pro inženýry 21. století, reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332, 2011. [www.mi21.vsb.cz](http://www.mi21.vsb.cz)